Chapitre 1 : Suites et limites

Objectif 1 : **Savoir ce que l'on entend par limite d'une suite**

Objectif 2 : Savoir faire des opérations sur des limites de suites

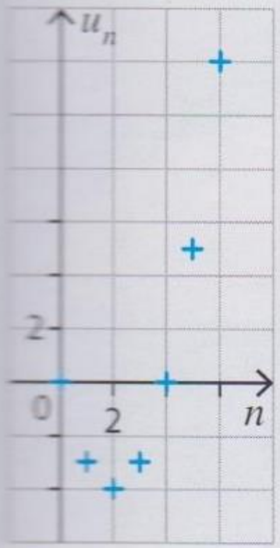
Objectif 3 : Savoir déterminer la limite d'une suite par comparaison

Objectif 4 : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique ou géométrique

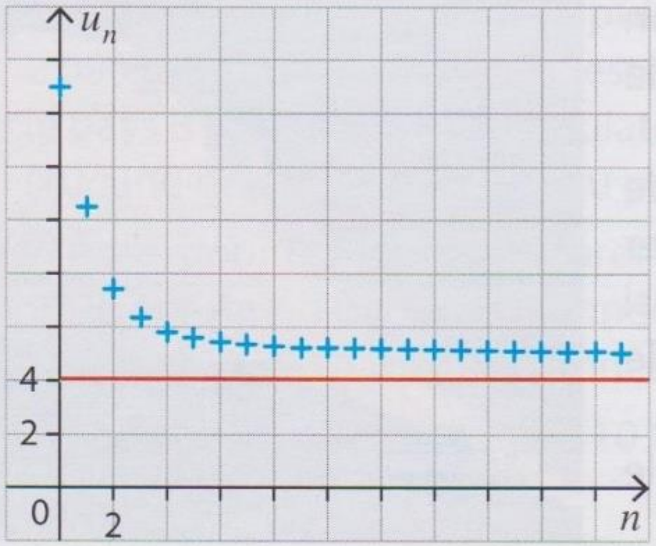
Application : QCM

1 Quelle est, parmi les suites représentées ci-dessous, celle qui semble avoir une limite finie ?

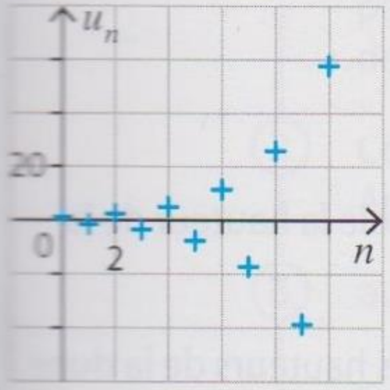
a



b



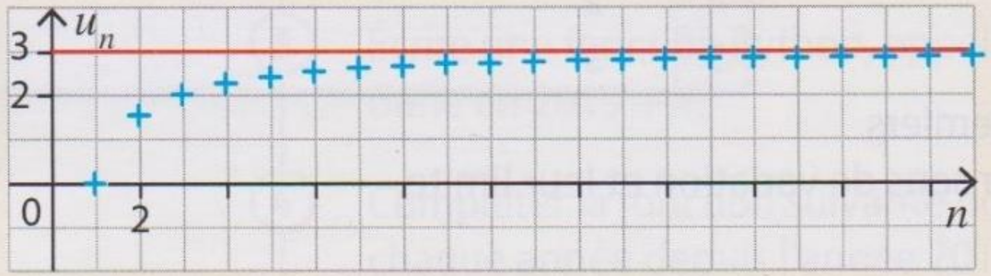
c



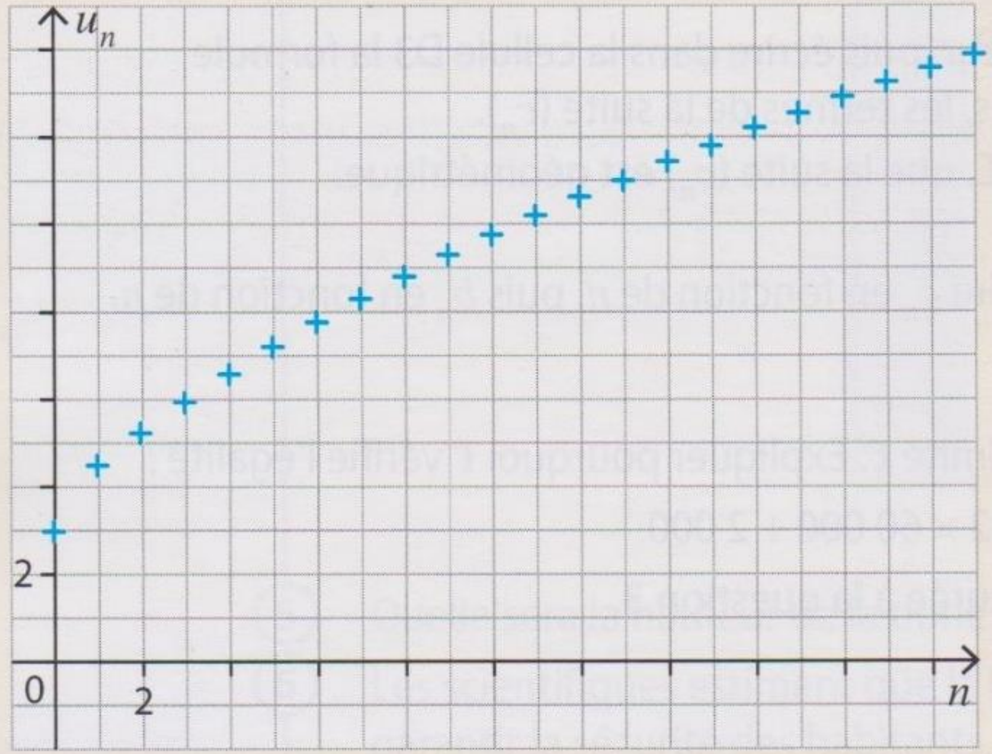
Application

Conjecturer graphiquement et avec la précision permise par le graphique, la limite de la suite représentée dans chaque cas ci-dessous.

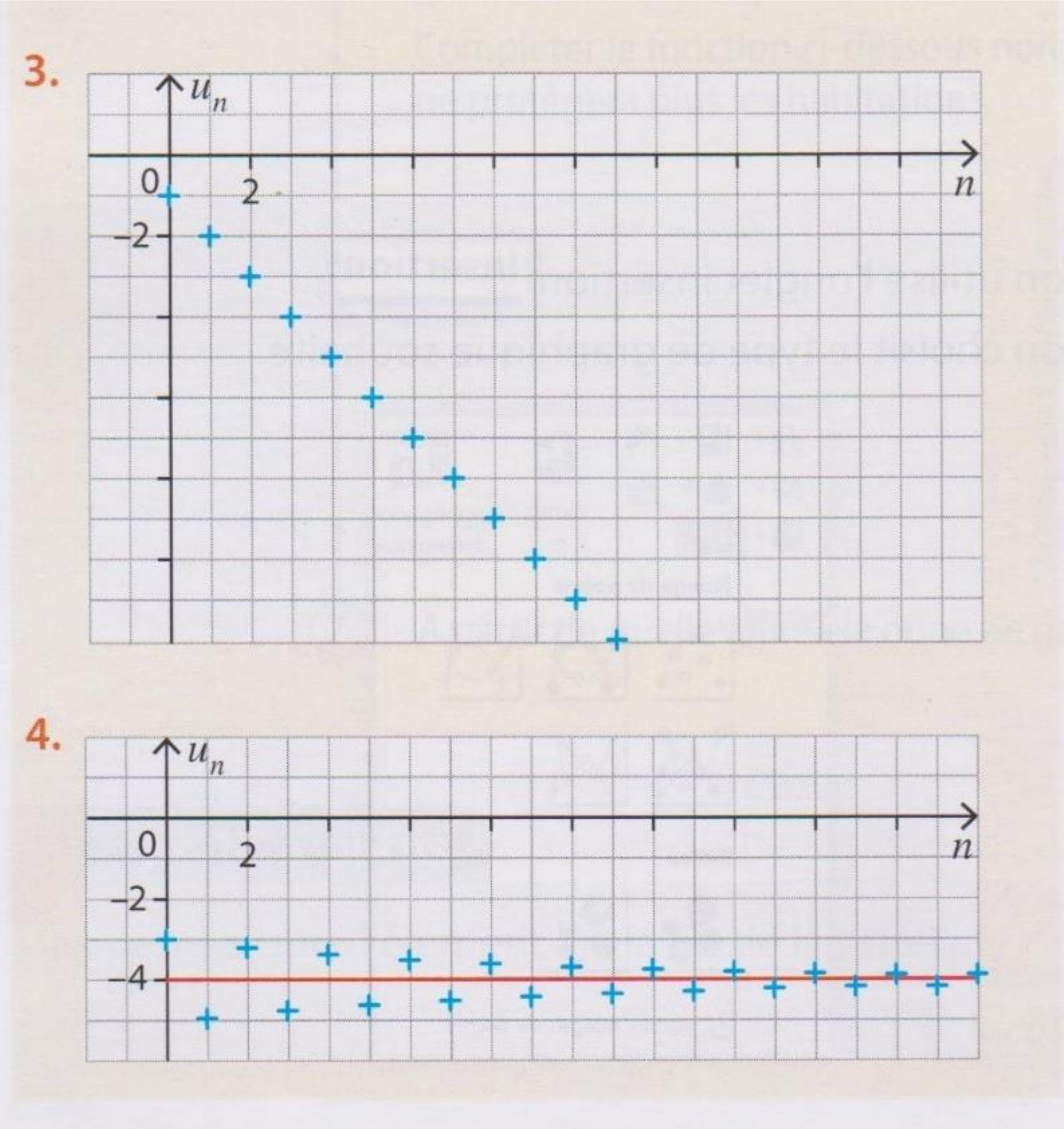
1.



2.



Application



Chapitre 1 : Suites et limites

Objectif 1 : Savoir ce que l'on entend par limite d'une suite

Objectif 2 : Savoir faire des opérations sur des limites de suites

Objectif 3 : Savoir déterminer la limite d'une suite par comparaison

Objectif 4 : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique ou géométrique

1er cas : **somme** de limites de suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	l	l	+∞	-∞	+∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	l'	+∞	-∞	+∞	-∞	-∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n)$	$l + l'$	+∞	-∞	+∞	-∞	Forme indéterminée

La levée de la forme indéterminée peut s'effectuer en modifiant l'écriture de $U_n + V_n$.

1er cas : **somme** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = 2n^2$ et $V_n = -3n + 5$

1er cas : **somme** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = 2n^2$ et $V_n = -3n + 5$

On a $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$. La limite de la somme de ces suites présente une forme indéterminée.

1er cas : **somme** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = 2n^2$ et $V_n = -3n + 5$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$. La limite de la somme de ces suites présente une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on va factoriser l'expression par n^2, on obtient :

$$U_n + V_n = 2n^2 - 3n + 5 = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$$

1^{er} cas : **somme** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = 2n^2$ et $V_n = -3n + 5$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$. La limite de la somme de ces suites présente une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on va factoriser l'expression par n^2, on obtient :

$$U_n + V_n = 2n^2 - 3n + 5 = n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right)$$

Telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 2$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n^2} = 0$

Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 * 2 = +\infty$

2^e cas : **produit** de limites de suites

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n * V_n)$	$l * l'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	Forme indéterminée

Comme dans le cas de produits de nombres relatifs, la règle des signes s’applique pour le produit de limites.

2^e cas : **produit** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = n + 2$ et $V_n = n - 5$

2^e cas : **produit** de limites de suites

Exemple

Soient 2 suites définies pour tout entier naturel n : $U_n = n + 2$ et $V_n = n - 5$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$. Par produit, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n * V_n) = +\infty$.

3^e cas : **quotient** de limites de suite

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$	l	$l \neq 0$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$	$l' \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	l	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n}$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Comme dans le cas de quotients de nombres relatifs, la règle des signes s'applique pour le quotient de limites.

3e cas : **quotient** de limites de suite

Exemple

Soit la suite définie pour tout entier naturel n : $U_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

3e cas : **quotient** de limites de suite

Exemple

Soit la suite définie pour tout entier naturel n : $U_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

La limite du numérateur est $+\infty$, la limite du dénominateur est $+\infty$: on a une forme indéterminée.

3^e cas : **quotient** de limites de suite

Exemple

Soit la suite définie pour tout entier naturel n : $U_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

La limite du numérateur est $+\infty$, la limite du dénominateur est $+\infty$: on a une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on factorise par n le numérateur, et par n^2 le dénominateur.

3^e cas : **quotient** de limites de suite

Exemple

Soit la suite définie pour tout entier naturel n : $U_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

La limite du numérateur est +∞, la limite du dénominateur est +∞ : on a une forme indéterminée.

Pour lever l'indétermination, on factorise par n le numérateur, et par n^2 le dénominateur. On obtient :

Un = $\frac{n\,(1-\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1}{n} * \frac{1-\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$, avec $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{3}{n})$= 1 et $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n^2})$= 1 d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

Application

(u_n) et (v_n) sont deux suites telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\frac{1}{3}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{2}{7}$ et $v_n \neq 0$ pour tout n.

Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n, par les expressions ci-dessous.

1. $a_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

2. $b_n = u_n^{\,2}$

3. $c_n = 1 - 9u_n$

4. $d_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

Application

Donner la limite, lorsqu'elle existe, de chaque suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions ci-dessous.

a. $u_n = \dfrac{3}{n^2}$

b. $v_n = -3n^2$

c. $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

d. $t_n = (-1)^n$

Application

Déterminer la limite des suites définies, pour tout entier naturel n non nul, par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{2}{n} + 4$

2. $v_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{n} + 1$

3. $w_n = -\dfrac{3}{n^3} + \dfrac{1}{n}$

4. $t_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{n} - 5$

Application

Déterminer la limite des suites définies ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{3n^3 - n + 1}{n^2 - 2n + 1}$ pour tout entier naturel $n > 2$.

2. $v_n = \dfrac{2n^2 - n + 4}{n^3 + n + 1}$ pour tout entier naturel n.

3. $w_n = \dfrac{n - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

PRISE D'INITIATIVE

Déterminer la limite des suites définies pour tout entier naturel n non nul par les expressions ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{-3n^2 - 2n + 1}{3 + \dfrac{1}{n}}$

2. $v_n = 5n^3 - 3n\sqrt{n}$

3. $w_n = \dfrac{-4n^3 + n^2 + n - 1}{n^3 + n^2 - 4n - 3}$

4. $t_n = \dfrac{(n-1)(n+2)}{n^2 - n + 1}$

Chapitre 1 : Suites et limites

Objectif 1 : Savoir ce que l'on entend par limite d'une suite

Objectif 2 : Savoir faire des opérations sur des limites de suites

Objectif 3 : Savoir déterminer la limite d'une suite par comparaison

Objectif 4 : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété (admise)

Soient deux limites U_n et V_n telles que $U_n \leq V_n$ à partir d'un certain rang

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ = +∞, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ = + ∞.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ = - ∞, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ = -∞.

Exemple

Soient $U_n = n^2 + \sqrt{n+1}$ et $V_n = n^2$ définies pour tout entier n.

Exemple

Soient $U_n = n^2 + \sqrt{n+1}$ et $V_n = n^2$ définies pour tout entier n.

On a $n + 1 > 0$, $\sqrt{n+1}$ définie, et $\sqrt{n+1} > 0$.

Donc $n^2 + \sqrt{n+1} > n^2$ c'est-à-dire $U_n > V_n$.

Exemple

Soient $U_n = n^2 + \sqrt{n+1}$ et $V_n = n^2$ définies pour tout entier n.

On a $n + 1 > 0$, $\sqrt{n+1}$ définie, et $\sqrt{n+1} > 0$.

Donc $n^2 + \sqrt{n+1} > n^2$ c'est-à-dire $U_n > V_n$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Propriété (admise)

Soient 2 suites U_n et V_n qui convergent respectivement vers l et l' lorsque n tend vers l'infini.

Si $U_n \leq V_n$ alors $l \leq l'$.

Théorème d’encadrement dit « Théorème des gendarmes » (admis)

Soient 3 suites U_n, V_n et W_n telles que $U_n < V_n < W_n$, à partir d’un certain rang.

Si U_n et W_n convergent vers l, alors V_n converge vers l.

Exemple

Soient $U_n = \frac{5*(-1)^n}{n+4}$ définie pour tout entier $n \geq 1$.

Exemple

Soient $U_n = \frac{5*(-1)^n}{n+4}$ définie pour tout entier $n \geq 1$.

On a pour tout entier n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Exemple

Soient $U_n = \frac{5*(-1)^n}{n+4}$ définie pour tout entier n ≥ 1.

On a pour tout entier n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Comme $\frac{5}{n+4}$ est positif, on peut multiplier chaque membre de l'inégalité par $\frac{5}{n+4}$:

On obtient : $\frac{-5}{n+4} \leq \frac{5*(-1)^n}{n+4} \leq \frac{5}{n+4}$

Exemple

Soient $U_n = \frac{5*(-1)^n}{n+4}$ définie pour tout entier n ≥ 1.

On a pour tout entier n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Comme $\frac{5}{n+4}$ est positif, on peut multiplier chaque membre de l'inégalité par $\frac{5}{n+4}$:

On obtient : $\frac{-5}{n+4} \leq \frac{5*(-1)^n}{n+4} \leq \frac{5}{n+4}$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{n+4} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n+4} = 0$

Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{5*(-1)^n}{n+4} = 0$

Application

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + \sqrt{n^4 + 3}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $n \leqslant u_n$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant \dfrac{-n+1}{n+4}$.

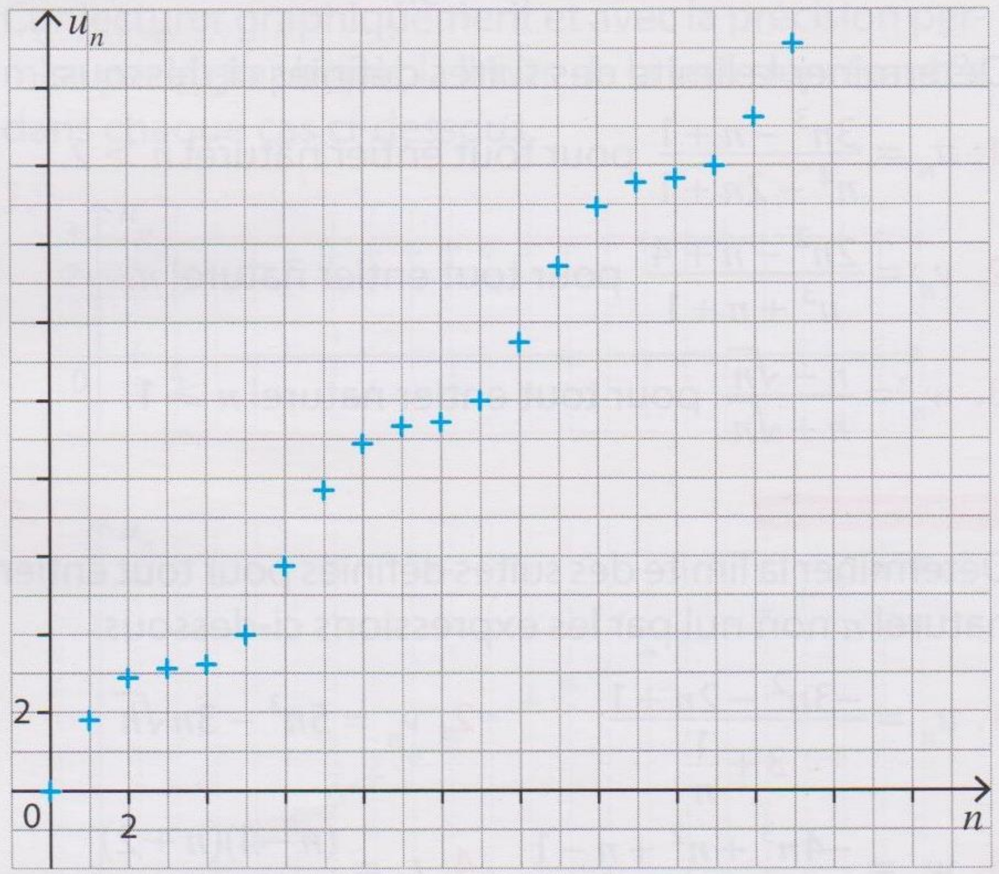
On suppose que (v_n) est convergente.

- Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \leqslant -1$.

Application

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + \sin(n)$.

1. En utilisant la représentation graphique de la suite (u_n) ci-dessous, conjecturer la limite de (u_n).



2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$n - 1 \leqslant u_n.$$

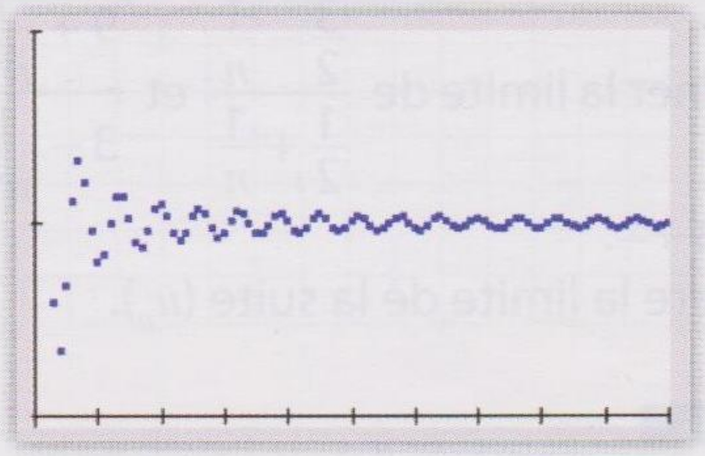
b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Application

On considère la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n + 2\cos(n)}{n}.$$

On a tracé sur une calculatrice les termes de la suite. L'axe des abscisses est gradué de 10 en 10. L'axe des ordonnées est gradué de 1 en 1.



1. Conjecturer la limite de la suite (u_n).
2. En utilisant le fait que $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\frac{n-2}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+2}{n}.$$

3. Démontrer la conjecture de la question 1.

Chapitre 1 : Suites et limites

Objectif 1 : Savoir ce que l'on entend par limite d'une suite

Objectif 2 : Savoir faire des opérations sur des limites de suites

Objectif 3 : Savoir déterminer la limite d'une suite par comparaison

Objectif 4 : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique ou géométrique

Propriété

Soit Un une suite arithmétique de 1er terme U_0 et de raison r.

Si r > 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Si r < 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

Si r = 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$.

Démonstration

On a $U_n = U_0 + nr$

Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + nr) = +\infty$.

Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + nr) = -\infty$.

Si $r = 0$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} nr = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_0 + nr) = U_0$.

Propriété (admise)

Soit U_n une suite géométrique de 1er terme U_0 et de raison q, telle que $U_n = U_0 * q^n$.

1er cas : $q \geq 0$ et $U_0 > 0$

Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Si $q = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = U_0$

Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

2e cas : $q \geq 0$ et $U_0 < 0$

Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$.

Si $q = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = U_0$

Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

Exemple

Soit la suite géométrique $V_n = -3 * \left(\frac{2}{5}\right)^n$, définie pour tout n entier naturel.

Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$.

Par produit, on a $\lim_{n \to +\infty} -3 * \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$

Remarque

La suite $U_{n+1} = a\, U_n + b$ définit pour tout n entier naturel avec a et b deux nombres réels est appelée suite **arithmético-géométrique**.